CHUYÊN ĐỀ 10: TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp:

- Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.
- Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 1800 (bù nhau).
- Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn một đoạn thẳng dưới một góc bằng nhau.
- Chứng minh tổng của góc ngoài tại một đỉnh với góc trong đối diện bù nhau.
- Nếu MA.MB = MC.MD hoặc NA.ND = NC.NB thì tứ giác ABCD nội tiếp.

(Trong đó: $M = AB \cap CD, N = AD \cap BC$)

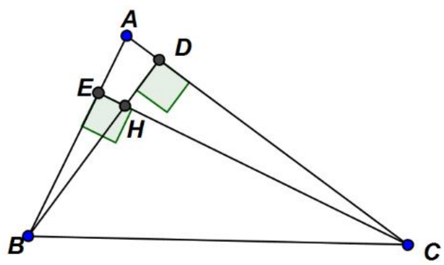
- Nếu PA.PC = PB.PD thì tứ giác ABCD nội tiếp. (Trong đó $P = AC \cap BD$)
- Chứng minh tứ giác đó là hình thang cân; hình chữ nhật; hình vuông; …

Nếu cần chứng minh cho nhiều điểm cũng thuộc một đường tròn ta có thể chứng minh lần lượt 4 điểm một lúc. Song cần chú ý tính chất "Qua 3 điểm không thẳng hàng xác định duy nhất một đường tròn"

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho Δ ABC, BD, CE là hai đường cao. Chứng minh: Tứ giác BCDE và AEHD nội tiếp.

Chứng minh



Xét tứ giác BCDE, có:

$BDC = BEC = 90^0$ (vì BD, CE là hai đường cao)

A là góc chung.

Suy ra hai đỉnh E, D cùng nhìn cạnh BC với một góc bằng 90^0.

Suy ra Tứ giác BCDE nội tiếp.

Xét tứ giác AEHD, có:

$AEH = 90^0$ (EC là đường cao)

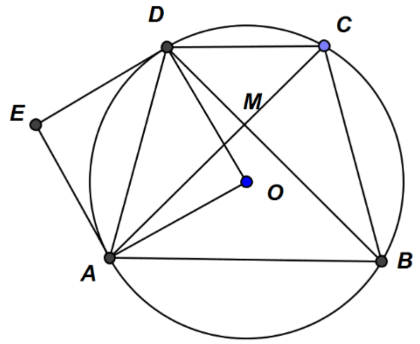
$ADH = 90^0$ (BD là đường cao)

Suy ra $AEH + ADH = 180^0$

Suy ra tứ giác AEHD nội tiếp.

Bài tập 2: Cho hình thang cân ABCD (AB > CD, AB // CD) nội tiếp trong đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D chúng cắt nhau ở E. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh tứ giác AEDM nội tiếp được trong một đường tròn.

Chứng minh



Ta có:

$EAC = \frac{1}{2}$sđAC (góc tạo bởi tia tiếp tuyến AE và dây AC của đường tròn (O))

Tương tự:

$xDB = \frac{1}{2}$sđDB (Dx là tia đối của tia tiếp tuyến DE)

Mà AC = BD (do ABCD là hình thang cân) nên $AC = BD$.

Do đó $EAC = xDB$.

Vậy tứ giác AEDM nội tiếp được trong một đường tròn.

Bài tập 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R, dây cung AC. Gọi M là điểm chính giữa cung AC. Đường thẳng kẻ từ C song song với BM cắt tia AM ở K và cắt tia OM ở D. OD cắt AC tại H. Chứng minh tứ giác CKMH nội tiếp.

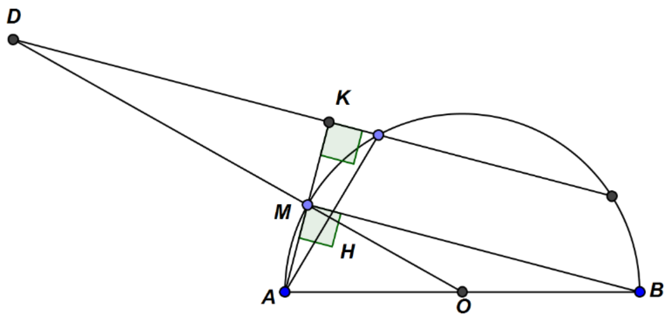
Chứng minh

Ta có: $AMB = 90^0$(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

Suy ra $AM \perp MB$

Mà CD // BM (giả thiết) nên AM $\perp$ CD .

Vậy $MKC = 90^0$.



Ta có:

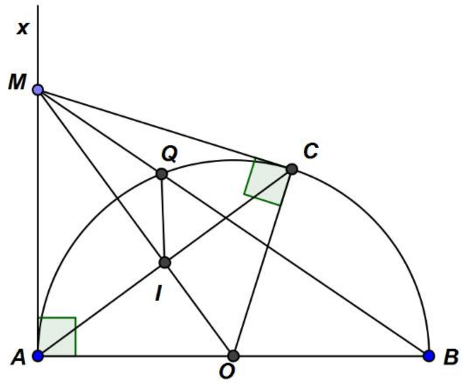
$AM = CM$ (giả thiết)

Suy ra OM $\perp$ AC

Suy ra $MHC = 90^0$.

Tứ giác CKMH có $MKC + MHC = 180^0$ nên nội tiếp được đường tròn.

Bài tập 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ điểm M trên tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến thứ hai MC (C là tiếp điểm). Đường thẳng MB cắt nửa đường tròn (O) tại Q. Gọi giao điểm của MO và AC là I. Chứng minh rằng: Tứ giác AMQI nội tiếp.



Chứng minh

Ta có:

MA = MC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

OA = OC (bán kính đường tròn (O))

Do đó: MO $\perp$ AC suy ra $MIA = 90^0$.

$AQB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

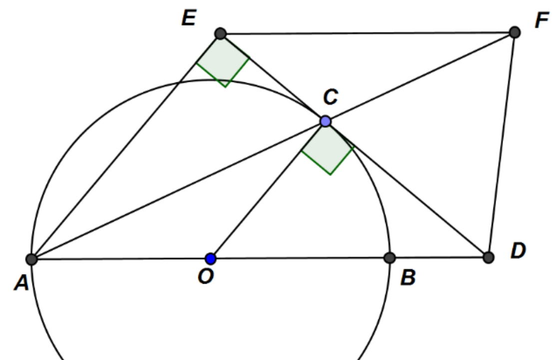
Suy ra $MQA = 90^0$

Suy ra hai đỉnh I, Q cùng nhìn cạnh AM với một góc bằng 90^0

Suy ra tứ giác AMQI nội tiếp được trong đường tròn

Bài tập 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia AB lấy điểm D nằm ngoài đoạn AB và kẻ tiếp tuyến DC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng CD và F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng AC.

Chứng minh: Tứ giác EFDA nội tiếp.



Chứng minh

Ta có:

$AED = 90^0$ (vì AE $\perp$ CD tại E)

$AFD = 90^0$ (vì DF $\perp$ AC tại F)

Suy ra hai đỉnh E, F cùng nhìn cạnh AD với một góc bằng 90^0.

Suy ra tứ giác EFDA nội tiếp.

Bài tập 6: (Định lý Plôtêmê)

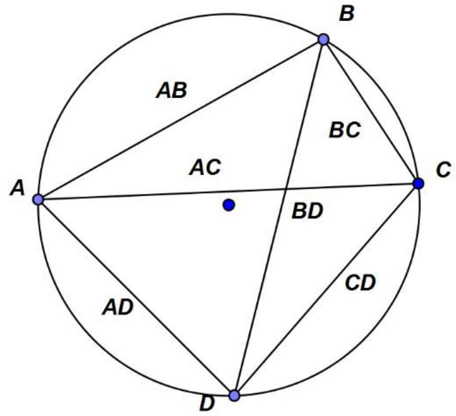
a) Nếu một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.
b) Nếu một tứ giác thỏa mãn điều kiện tổng các tích của các cặp cạnh đối diện bằng tích của hai đường chéo thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn.

Chứng minh

Gọi ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Trên cung nhỏ BC, ta có các góc nội tiếp:

$BAC = BDC$, và trên cung AB, $ADB = ACB$.



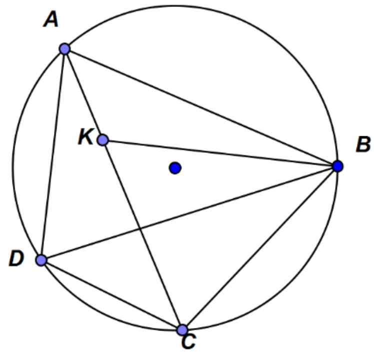
Lấy 1 điểm K trên AC sao cho $ABK = CBD$

Từ $ABK + CBK = ABC = CBD + ABD$.

Suy ra $CBK = ABD$.

Do vậy tam giác $\triangle ABK \backsim \triangle DBC$, và tương tự có $\triangle ABD \backsim \triangle KBC$.

Suy ra $\frac{AK}{AB} = \frac{CD}{BD}$ và $\frac{CK}{BC} = \frac{DA}{BD}$



Từ đó AK.BD = AB.CD và CK.BD = BC.DA

Cộng các vế của 2 đẳng thức trên: AK.BD + CK.BD = AB.CD + BC.DA;

Hay: (AK+CK).BD = AB.CD + BC.DA;

Mà AK+CK = AC, nên AC·BD = AB.CD + BC.DA. (Điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB. M là một điểm trên tiếp tuyến xBy. AM cắt (O) tại C; lấy D $\in$ BM; nối AD cắt (O) tại I. Chứng minh: Tứ giác CIDM nội tiếp.

Bài tập 2: Cho Δ ABC vuông tại A có AB = 5cm và AC = $5\sqrt{3}$ cm. Đường cao AH (H $\in$ BC). Đường tròn (H; HA) cắt AB tại D và AC tại E. Chứng minh: Tứ giác CEBD nội tiếp.

Bài tập 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ A và B vẽ Ax $\perp$ AB và By $\perp$ BA. Vẽ tiếp tuyến x'My' (tiếp điểm M) cắt Ax tại C và By tại D. OC cắt AM tại I và OD cắt BM tại K. Chứng minh: Tứ giác CIKD nội tiếp.

Bài tập 4: Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ bán kính OC $\perp$ AB. Từ B vẽ tiếp tuyến Bx. Gọi M là trung điểm OC, AM kéo dài cắt đường tròn tại E và Bx tại I. Tiếp tuyến từ E cắt Bx tại D.

Chứng minh: Tứ giác MODE nội tiếp.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC ($BAC < 45^0$) nội tiếp trong nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Dựng tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến tiếp tuyến đó. AH cắt đường tròn (O) tại M (M $\neq$ A). Đường vuông góc với AC kẻ từ M cắt AC tại K. Chứng minh tứ giác MKCH nội tiếp.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Đường tròn tâm O đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N (A $\neq$ M và N). Chứng minh:

a) $AHN = ACB$

b) Tứ giác BMNC nội tiếp.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc đường tròn đó (C $\neq$ A và B). Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AC và BC. Các đường thẳng BN và AC cắt nhau tại I, các dây cung AN và BC cắt nhau ở P. Chứng minh tứ giác ICPN nội tiếp. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB . Trên tiếp tuyến kẻ từ A của đường tròn này lấy điểm C sao cho AC = AB. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD của đường tròn (O; R), với D là tiếp điểm.

Chứng minh rằng tứ giác ACDO nội tiếp.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O) đường kính AB bằng 6cm . Gọi H làđiểm nằm giữa A và B. Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB, đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại C và D. Hai đường thẳng BC và DA cắt nhau tại M. Từ M hạ đường vuông góc MN với đường thẳng AB (N thuộc thẳng AB). Chứng minh MNAC là tứ giác nội tiếp.